Neurčitý integrál 3 – souhrnné příklady.
Najděte primitivní funkce na maximálních otevřených intervalech:

Najděte primitivní funkce na maximálních intervalech:

1. $\int \left(\frac{\sin x \cdot \cos x}{4 + \cos^4 x} + \frac{\sqrt{x} - 1}{x \cdot (x - 2\sqrt{x} + 2)} \right) dx$

2. $\int \left(\frac{\ln(1 - \sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{2e^{2x} - 5}{e^{2x} + 4e^x + 5} \right) dx$

3. $\int \left(\frac{1}{x^3} \cdot arctg\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{(\sqrt{x} + 2) \cdot (x + 6\sqrt{x} + 10)} \right) dx$

4. $\int \left(\frac{\ln x}{x \cdot \sqrt{1 - \ln^4 x}} + \frac{e^x - 2}{e^{2x} + 2e^x + 2} \right) dx$

Řešení:

① $I = \int \left(\frac{\sin x . \cos x}{4 + \cos^4 x} + \frac{\sqrt{x} - 1}{x(x - 2\sqrt{x} + 2)} \right) dx = I_1 + I_2$

(i) integrovaná funkce je spojitá na intervalu $(0, +\infty)$, tedy má zde primitivní funkci a výpočet „rozdělíme" na výpočet I_1 a I_2:

$$I_1 = \int \frac{\sin x . \cos x}{4 + \cos^4 x} dx \underset{VS1}{=} \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{matrix} \right| = - \int \frac{t}{4 + t^4} dt =$$

$$\underset{VS1}{=} \left| \begin{matrix} t^2 = u \\ 2t dt = du \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{4 + u^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \int \frac{du}{1 + \left(\frac{u}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right)}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{2}\right) + C = -\frac{1}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos^2 x}{2}\right) + C$$

Poznámka: 1) v I_1 lze „hned" substituovat $t = \cos^2 x$, pak
$g'(x) = 2\cos x . (-\sin x)$ (tj. $dt = -2\cos x . \sin x \, dx$)

a $I_1 = \int \frac{\sin x . \cos x}{4 + \cos^4 x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2 \sin x . \cos x}{4 + \cos^4 x} dx = \left| \begin{matrix} \cos^2 x = t \\ 2\cos x(-\sin x) dx = \\ = dt \end{matrix} \right| =$

$\underset{1VS}{=} -\frac{1}{2} \int \frac{1}{4 + t^2} dt$ a dále už „stejně" jako dříve

2) integrál I_1 existuje v R, ale součet v zadání I je definován jen v $(0, +\infty)$

$$\underline{I_2 = \int \frac{\sqrt{x}-1}{x(x-2\sqrt{x}+2)}\,dx} \underset{VS2}{=} \left| \begin{array}{c} \text{často:} \\ \sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{nebo ke práci:} \\ \sqrt{x}=t \\ x=t^2 (=g(t)) \\ \text{a } g'(t)=2t \end{array} \Bigg|$$

$$= \int \frac{t-1}{t^2(t^2-2t+2)} \cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t-1}{t(t^2-2t+2)}\,dt = \left(\begin{array}{c}\text{integrál racionální funkce –} \\ \text{– rozklad na parciální zlomky}\end{array}\right)$$

$$= -\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{t}{t^2-2t+2}\,dt = -\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{2t-2}{t^2-2t+2}\,dt +$$

$$+ \int \frac{1}{(t-1)^2+1}\,dt = -\underset{(\text{ale } t>0)}{\ln|t|} + \frac{1}{2}\ln(t^2-2t+2) + \operatorname{arctg}(t-1) + C$$

$$\underset{(t=\sqrt{x})}{=} \underline{-\ln(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}(x-2\sqrt{x}+2) + \operatorname{arctg}(\sqrt{x}-1) + C\,, \quad x\in(0,+\infty)}$$

$$(C\in\mathbb{R})$$

<u>Rozklad</u>: $\dfrac{2(t-1)}{t(t^2-2t+2)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{Bt+C}{t^2-2t+2}$, a tedy

(pozn. t^2-2t+2 nemá reálné kořeny)

$$2(t-1) = A(t^2-2t+2) + Bt^2 + Ct$$

a srovnáním koeficientů:

$$\begin{array}{llll} t^2: & A+B & =0 & \Rightarrow B=1 \\ t: & -2A \quad +C & = 2 & \Rightarrow C=0 \\ t^0: & 2A & =-2 & \Rightarrow A=-1 \end{array}$$

(2) $I = \int \Big(\underbrace{\frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}_{\downarrow} + \underbrace{\frac{2e^{2x}-5}{e^{2x}+4e^{x}+5}}_{\text{def. a spojitá v } R} \Big) dx = I_1 + I_2$

zde: $x>0$ a $1-\sqrt{x}>0 \iff \underline{x \in \langle 0,1)}$ – interval, kde existuje I

a vzorec: $I = I_1 + I_2$, a

$\underline{I_1 = \int \frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx} = -2 \int \ln(1-\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx \underset{1VS}{=}$

$= \left| \begin{array}{l} 1-\sqrt{x} = t \;(= g(x)) \\ -\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \;\left(neboť\; g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \end{array} \right| = -2 \int \ln t\, dt \underset{PP}{=}$

$= \left| \begin{array}{ll} u' = 1, & u = t \\ v = \ln t, & v' = \frac{1}{t} \end{array} \right| = -2 \left(t \cdot \ln t - \int t \cdot \frac{1}{t}\, dt \right) =$

$= -2\,(t \ln t - t) + C \underset{\substack{\text{„zpět"} \\ (t = 1-\sqrt{x})}}{=} \underline{-2(1-\sqrt{x})\left(\ln(1-\sqrt{x}) - 1\right) + C}$, $C \in R$

$x \in (0,1)$

$\underline{I_2 = \int \frac{2e^{2x}-5}{e^{2x}+4e^{x}+5}\,dx} \underset{VS2}{=} \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t \;(= g(t)) \\ dx = \frac{1}{t}dt \;\left(neboť\; g'(t) = \frac{1}{t}\right) \end{array} \right| =$

(– integrál racionální funkce „v e^x" – doporučená substituce $t = e^x$)

$= \int \frac{2t^2-5}{t^2+4t+5} \cdot \frac{1}{t}\, dt =$ „rozklad" $=$

(na další straně)

$$= -\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{3t+4}{t^2+4t+5}\,dt = -\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{3}{2}\int \frac{2t+4}{t^2+4t+5}\,dt - 2\int \frac{1}{(t+2)^2+1}\,dt =$$

$$= -\ln|t| + \frac{3}{2}\ln\left(t^2+4t+5\right) - 2\,\mathrm{arctg}\,(t+2) + C =$$

$$= \underline{-x + \frac{3}{2}\ln\left(e^{2x}+4e^{x}+5\right) - 2\,\mathrm{arctg}\,(e^{x}+2) + C}$$

(I_2 existuje v $\mathbb{R}$, ale součet funkcí má integrál jen v $(0,1)$)

<u>A rozklad na parciální zlomky:</u>

$$\frac{2t^2-5}{t(t^2+4t+5)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+4t+5}, \text{ tedy}$$

$$2t^2-5 = A(t^2+4t+5) + Bt^2 + Ct, \text{ a srovnáme koeficienty}$$

u
t^2: $A + B = 2 \Rightarrow B = 3$
t: $4A + C = 0$, $C = 4$
t^0: $5A = -5 \Rightarrow \underline{A = -1}$

...

(3) $$\underline{I = \int\left(\frac{1}{x^3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{(\sqrt{x}+2)(x+6\sqrt{x}+10)}\right)dx} = I_1 + I_2$$

interval, kde I existuje (tj. kde funkce daná za $\int$ má primitivní) je $(0,+\infty)$ („určuje" $\sqrt{x}$ a $\frac{1}{x}$) a výpočet:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx = -\frac{1}{2}\int \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right)dx \underset{1VS}{=} \left|\begin{array}{l} \frac{1}{x^2} = t \\ -\frac{2}{x^3}dx = dt \end{array}\right|$$

$$= -\frac{1}{2}\int \mathrm{arctg}\,t\,dt \underset{PP}{=} \left|\begin{array}{ll} u' = 1, & u = t \\ v = \mathrm{arctg}\,t, & v' = \frac{1}{1+t^2} \end{array}\right| \overset{*}{=}$$ (na další stránce) pokračování (omlouváme se)

$$\overset{*}{=} -\frac{1}{2}\left(t\,\mathrm{arctg}\,t - \int \frac{t}{1+t^2}\,dt\right) = -\frac{1}{2}\left(t\,\mathrm{arctg}\,t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right) + c$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^4}\right)\right) + c$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(\sqrt{x}+2)(x+6\sqrt{x}+10)}\,dx \underset{2VS}{=} \left|\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2\ (= g(t)) \\ dx = 2t\,dt \quad (\text{neboť } g'(t) = 2t) \end{array}\right|$$

$$= \int \frac{2t}{(t+2)(t^2+6t+10)}\,dt \underset{\text{„rozklad"}}{=} -2\int \frac{1}{t+2}\,dt + \int \frac{2t+10}{t^2+6t+10}\,dt =$$

$$= -2\int \frac{1}{t+2}\,dt + \int \frac{2t+6}{t^2+6t+10}\,dt + 4\int \frac{1}{(t+3)^2+1}\,dt =$$

$$= -2\ln|t+2| + \ln|t^2+6t+10| + 4\,\mathrm{arctg}(t+3) + C \underset{(t>0)}{=}$$

$$= -2\ln(\sqrt{x}+2) + \ln(x+6\sqrt{x}+10) + 4\,\mathrm{arctg}(\sqrt{x}+3) + c, \quad c \in \mathbb{R}, \ x \in (0, +\infty)$$

Rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{2t}{(t+2)(t^2+6t+10)} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{t^2+6t+10}, \text{ tj.}$$

$$2t = A(t^2+6t+10) + (Bt+C)(t+2), \text{ a odkud}$$

soustava rovnic pro A, B, C (srovnáním koeficientů polynomů)

$$\begin{array}{ll} u\ t^2: & A + B = 0 \\ u\ t: & 6A + 2B + C = 2 \\ u\ t^0: & 5A + C = 0 \end{array}$$

a řešení soustavy je: $A = -2$, $B = 2$, $C = 10$

④ $I = \int \left(\frac{\ln x}{x \cdot \sqrt{1-\ln^4 x}} + \frac{e^x - 2}{e^{2x} + 2e^x + 2} \right) dx = I_1 + I_2$

I_2 je definován v R, tj. maximální interval, kde integrál I existuje, „určuje" fce $\ln x$ a $\sqrt{1-\ln^4 x}$ – tj. $x > 0$ a $1 - \ln^4 x > 0 \Leftrightarrow \ln^4 < 1 \Leftrightarrow |\ln x| < 1 \Leftrightarrow \underline{\frac{1}{e} < x < e}$

(tj. integrál existuje v intervalu $\underline{\left(\frac{1}{e}, e\right)}$)

<u>a integrace:</u>

$$I_1 = \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln^4 x}}\, dx = \int \frac{\ln x}{\sqrt{1-\ln^4 x}} \cdot \frac{1}{x}\, dx \underset{1VS}{=}$$

$$= \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}\, dt \underset{VS}{=} \left| \begin{array}{l} t^2 = u \\ 2t\,dt = du \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2} \arcsin(u) + c = \underline{\frac{1}{2} \arcsin(\ln^2 x) + c}$$

$c \in R,\ x \in (e^{-1}, e)$

<u>a nebo „rychleji"</u> – vezmu na hned „vidíte", že $(\ln^2 x)' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}$,

a tedy lze si „představit": $\underline{\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-\ln^4 x}}\, dx} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-(\ln^2 x)^2}} \cdot \left(2\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) dx \underset{1VS}{=}$

$$= \left| \begin{array}{l} \ln^2 x = t\ (\equiv g(t)) \\ 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = g'(t) \\ (\text{nebo } 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx = dt) \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \frac{1}{2} \arcsin(t) + c$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin(\ln^2 x) + c \quad (\text{opět})$$

$c \in R,\ x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$

$$I_2 = \underbrace{\int \frac{e^x-2}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx}_{\text{(racionální „v } e^x\text{")}} = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t \ (\equiv g(t)) \\ dx = \frac{1}{t}\, dt \ (\text{neb } g'(t) = \frac{1}{t}) \end{array} \right| \underset{VS2}{=}$$

$$= \int \frac{t-2}{t^2+2t+2}\cdot\frac{1}{t}\,dt \underset{\text{„rozklad"}}{=} -\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{t+3}{t^2+2t+2}\,dt =$$

$$= -\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,dt + 2\int \frac{1}{(t+1)^2+1}\,dt =$$

$$= -\ln|t| + \frac{1}{2}\ln(t^2+2t+2) + 2\,\mathrm{arctg}(t+1) + C =$$

$$= \underline{-x + \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+2e^x+2) + 2\,\mathrm{arctg}(e^x+1) + C}$$

(pozn. – integrál I_2 „sám" existuje v R, ale „v I vládne" I_1)

<u>A rozklad na parciální zlomky:</u>

$$\frac{t-2}{(t^2+2t+2)t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+2t+2}, \text{ tedy odkud}$$

$$t-2 = A(t^2+2t+2) + Bt^2 + Ct$$

(a srovnáním koeficientů dostaneme soustavu rovnic pro A, B, C)

$$\left.\begin{array}{lllll} u\ t^2: & A+B & & = & 0 \\ u\ t: & 2A & +C & = & 1 \\ u\ t^0: & 2A & & = & -2 \end{array}\right\}$$

a řešení soustavy: $\underline{A=-1,\ B=1,\ C=3}$